

基础一：永/电 磁铁

PART ONE: Permanent/Electric Magnet

目标 Sections

- S1. 了解磁场的线性控制方程，即麦克斯韦方程组；
- S2. 了解磁场力的空间非线性，即三次方关系；
- S3. 了解磁场力的不稳定平衡，即恩绍定理；和
- S4. 了解电磁铁的基本控制参数，即电流与匝数。

S1 线性控制方程

麦克斯韦方程（微分形式）：

$$\begin{cases} \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \cdot D = \rho \end{cases}$$

从上而下分别是：全电流定律，法拉第电磁感应定律，磁通连续性原理，高斯定理。

在这里，我们不要求掌握这个物理方程，或者它的求解方法。

但是，我们必须清楚地认识到，由控制方程可知，这是一个绝对的线性物理过程。

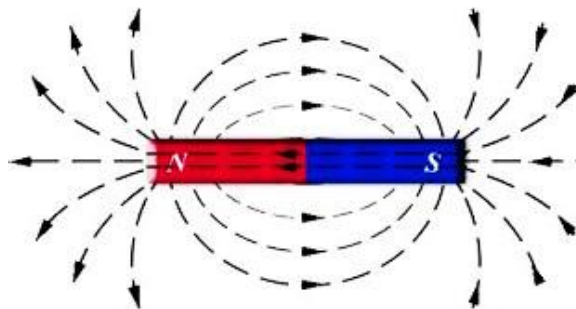
何为“线性物理过程”？我们考虑下面这个简单的例子。右图展示了条形磁铁的磁力线分布：“N 出 S 进”；磁力线越密集，磁场强度越大。

当空间中有且仅有一块条形磁铁， a ，在它的右侧 3cm 处有一个点， O （靠近

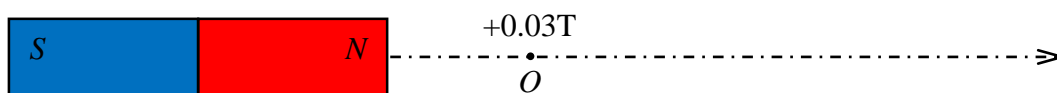


James Clerk Maxwell

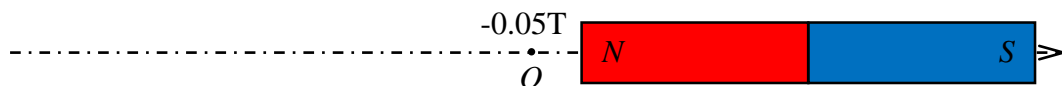
(13.6.1831~5.11.1879)



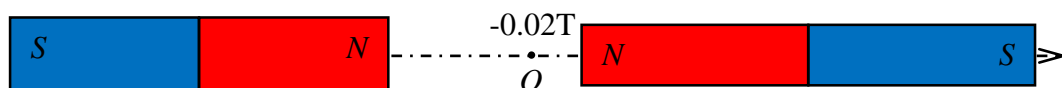
N极，处于中轴线上）。我们通过测量得到，O点的磁场强度为 $B_{O,a} = +0.03\text{T}$ （磁场强度单位：特斯拉，正号代表向右）。



接着，我们把条形磁铁，a，拿走，并在O点的右侧放置如下的条形磁铁，b。O点依旧位于中轴线上，靠近N极，距离为1cm。通过测量，我们得到O点的磁场强度为 $B_{O,b} = -0.05\text{T}$ （负号代表向左）。



最后，当我们把之前的条形磁铁，a，重新放回原来的位置（不关心两块条形磁铁间的相互作用）。这时，O点的磁场强度可以由两块条形磁铁分别产生的磁场通过线性叠加得到，即 $B_{O,a\&b} = B_{O,a} + B_{O,b} = +0.03 - 0.05 = -0.02\text{T}$ （负号代表向左）。



以上结论，对于磁悬浮应用而言，至关重要。

S2 空间非线性

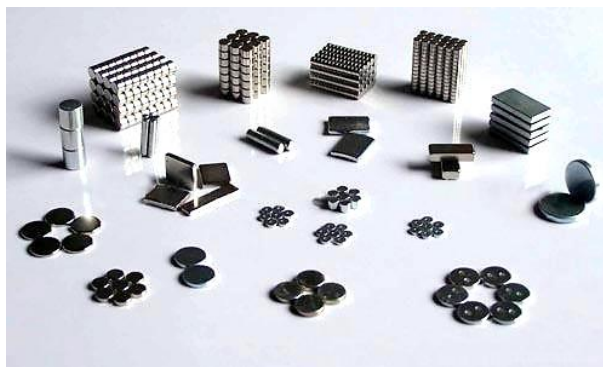
电磁场符合线性（矢量）叠加原理。但是，电磁场的空间分布具有很强的非线性。

对于一块普通磁铁而言，其表面的磁场强度大约为0.5T，这个数字会随着距离的增加**迅速减弱**。具体表现如右图所示，被吸引的铁屑主要集中在磁铁表面。



地球（特别是地心）是个大型磁体，但是地表的磁场强度大约仅为0.06mT（ $\text{mT} = 10^{-3}\text{T}$ ）。

下图展示了人类最前沿的科技成果——稀土永磁铁，其表面磁场强度可以高达1.4T。同样的，这个磁场强度随着距离的增加而迅速衰减。



<https://www.youtube.com/watch?v=DIPnE9vPT-A> 【 How its made - Neodymium magnets 】

由于特别强的表面磁场，这些稀土永磁铁可以非常危险！！！！

<https://www.youtube.com/watch?v=Vt8NOdINJ1s> 【 Super-strong neodymium magnets smashing and exploding 】

https://www.youtube.com/watch?v=tC13_BkDieU 【 Super-strong neodymium magnets destroying everyday items in slow motion 】

科学家 Mann（美国）与 Sims（英国）对磁场强度的空间非线性做了深入的研究。

Mann, B. P., and N. D. Sims. "Energy harvesting from the nonlinear oscillations of magnetic levitation." *Journal of Sound and Vibration* 319.1 (2009): 515-530.

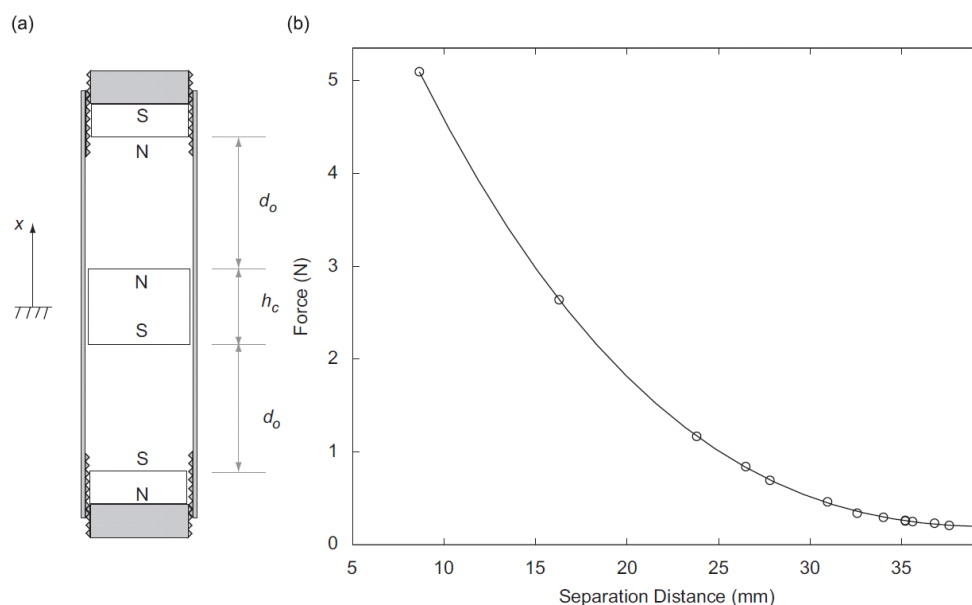


Fig. 1. A schematic diagram of the magnetic levitation system with threaded supports to position the outer magnets is shown in (a) Graph (b) shows the restoring force plotted as a function of the separation distance between the center and bottom magnet.

根据他们的测量结果，我们可以发现：当两块稀土永磁铁间的距离为 10mm 或 1cm 时，它们之间的相互作用力高达 5N（大约 500g 物体的重力）；而当距离增大到 25mm 时，相互作用力已经减少为 1N（80%降幅）；当距离继续增加到 40mm 时，相互作用力差不多只有 0.2N（又是 80%降幅）。

为了更精确地描述磁场力的这种空间非线性，他们尝试用如下三次方程拟合数据，取得了很好的结果（上图实线就是通过拟合得到的结果）：

$$F = \sum_{n=0}^3 a_n d^n = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + a_3 d^3$$

结论：磁场力随距离的增大而迅速减弱；当距离稍远处就可以近似为零了。

这个结论广泛适用于“永磁铁之间”，“电磁铁之间”，“永/电磁铁之间”，或“永/电磁铁与铁质材料之间”，包括斥力或吸力。

*延伸讨论：*我们把这种快速衰减的场（如磁场或声场），称作“近场”，因为我们无法在距离他们遥远的位置观察他们；相反，也存在所谓的“远场”，能向极深的宇宙无限传播，比如重力波。

S3 不稳定平衡

平衡分三种情况：稳定平衡（碗底部的球），中性平衡（平面上的球），和不稳定平衡（山峰上的球）。



【案例分析一】 磁场斥力平衡

考虑一个简单的磁悬浮实验：把两块“同极相对”的永磁铁约束在同一个轴上，如下图所示。那么上面的永磁铁将会被悬浮在半空中。这是一个稳定的平衡状态，因为任何的外界干扰，都不会让上方的永磁铁无限远离平衡位置。

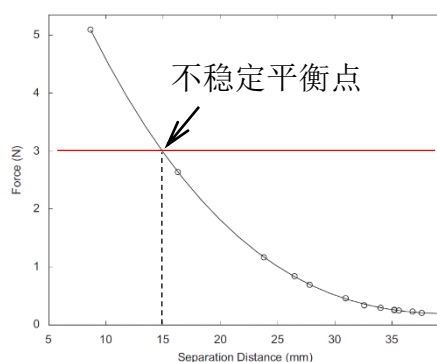




你看，斥力不是很好么。根据“磁场力越近越强”的效果，我们可以悬浮很重的物体呢！但是，请注意，这样实现的磁悬浮，需要机械接触，例如约束轴；而机械接触会导致材料损耗与维护成本。

【案例分析二】 磁场吸力平衡

反过来，我们考虑一下，有没有可能通过磁场的吸力实现悬浮呢？比如，我们尝试用 Mann 与 Sims 的磁铁系统，去悬浮一个 3N（红线表示重力）的重物。确实，理论上，我们在大约 15mm 的位置找到了一个平衡点，磁场力恰好可以抵消重力。但是，仔细一看，如果外界扰动让重物稍稍靠近磁铁，磁场力就会大于重力，进而让重物被磁铁吸引到底；而当重物稍稍远离磁铁，磁场力又会小于重力，重物会马上落下，无法悬浮。所以，磁场吸力的只能实现不稳定平衡点。



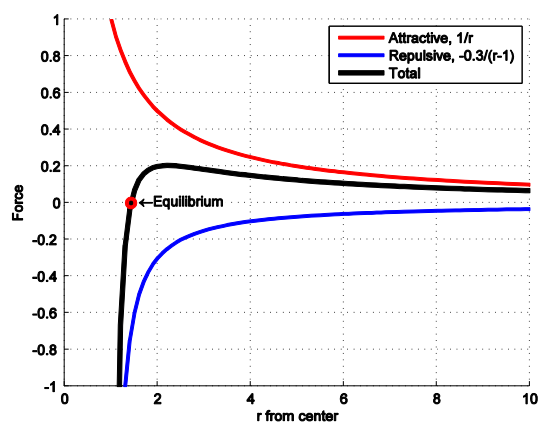
【案例分析三】 平面磁场平衡

我们注意到市场上有一种神奇的磁铁玩具。它由两组较大的永磁铁与六组较小的永磁铁组成。通过视频的描述，外围自由的永磁铁与六组小永磁铁都是相互排斥的关系，而与中间的大永磁铁相互吸引。这样一种特殊的磁铁组合，为什么可以实现空间上的约束定位呢？



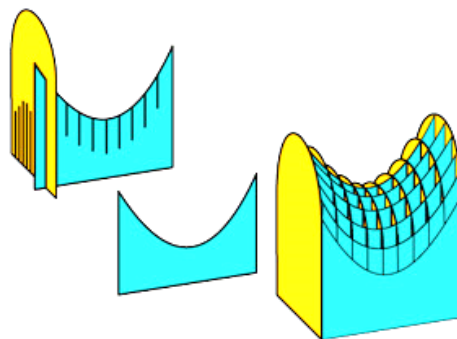
<https://www.youtube.com/watch?v=LyvfDzRLsiU> 【Amazing Discovery With Magnets】

通过 S1（线性控制方程）和 S2（空间非线性）两讲的结论，我们可以很容易地解释其中的原理。如下图所示，红线代表了两组大永磁铁间的吸引力，蓝线代表了大小永磁铁间的排斥力，黑线代表了以上两种力线性叠加的效果，小红圈表示平衡位置。由于小永磁铁与大永磁铁相比要弱得多，所以自由永磁铁在远场仍旧可以感受到大永磁铁的吸引力，黑线取正值；当自由永磁铁在吸引力的作用下，逐渐向组合磁铁靠近时，会首先进入小永磁铁的近场范围，排斥力将迅速增强，使黑线快速掉头向下，变成了负值。那么，自由永磁铁就被小永磁铁阻挡在了外围，不能进一步靠近大永磁铁。接近时排斥，远离时吸引，这是一个完美的稳定平衡。



然而，细心的你一定可以发现，这个玩具与【案例分析一】类似，也存在着与桌面的机械接触。如果，我们把桌子撤掉，这个玩具还能稳定平衡么？

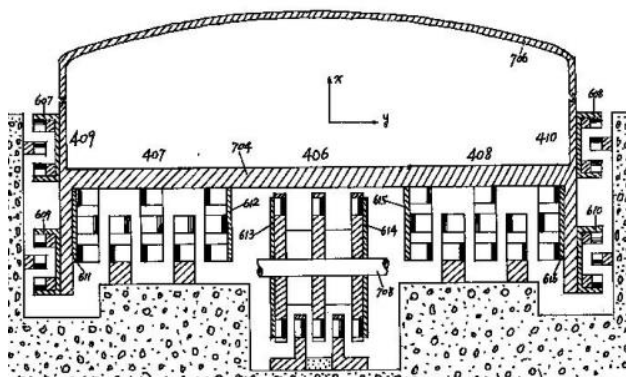
答案是否定的。这个玩具只能在桌面的约束下稳定平衡；一旦桌面被撤去，就会出现类似于马鞍型的磁力面（如下左图所示），向侧边失去稳定。进一步说，如下右图所示，桌面的作用，就是把自由永磁铁约束在蓝色面积表示的平面内，这类似于一个碗的底部，存在系统能量最低的稳定平衡点；在三维空间里，与蓝色面积垂直的黄色面积形成了连续的山脊，使自由永磁铁很容易就从侧边失去稳定，“滑下山坡”，被大永磁铁吸引去。



那么，到底能否通过永磁铁的排列组合，实现三维非接触稳定悬浮呢？答案是否定的。依据恩绍定理可得，稳定静止的磁悬浮是不可能仅仅通过静态电磁力去实现。

*恩绍定理的表述如下：点粒子集**不能**被稳定维持在仅由电荷的静电相互作用构成的一个**稳定静止的力学平衡结构**。该定理首次被英国数学家塞缪尔·恩绍于 1842 年证明。该定理通常被用于磁场中，但该定理最初被应用于静电场中。该定理适用于经典平方反比定律的力(静电力和引力)，**同时也适用于磁铁和顺磁性材料或者其它任意组合(但非抗磁性材料)的磁场力**。

在历史上，愚蠢的人类曾经尝试过各种各样的磁铁排列组合，试图达到永磁铁系统的非接触稳定悬浮，都以失败告终。下图展示了其中一种复杂的设计；遗憾的是，它也是失败作品之一。



通过高速旋转或抗磁物质，即可克服恩绍定理的适用范围。（此处不展开讨论）

参考文献：<http://www.diy-robots.com/?p=662> 【磁悬浮的故事（上） - 静态磁悬浮】

S4 （直流）电磁铁

电磁铁由线圈和铁芯（此处不展开讨论）组成。如右图所示，通电的电磁铁可以吸引大量的铁质材料。

铜的电阻率， ρ ，很小，是仅次于银的金属材料。所以，线圈一般由大量铜导线缠绕而成的，如下图所示。



线圈的电阻可以用下面的公式求得，

$$R = \frac{\rho L}{S}$$

其中， L 是线圈的总长度， S 是铜线的横截面积。如果线圈的匝数为 N ，半径为 r ，线圈的总长度可以表示为，

$$L = 2\pi Nr$$

根据欧姆定律，流过线圈的电流与其两端的直流电压和其电阻有关，

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho L} = \frac{US}{2\pi Nr\rho}$$

对于一般产品而已，线圈的材料（ ρ ），形状（ r ）与线圈两端的电压（ U ）是给定的，那么，我们可以进一步得到线圈发热功率（损耗）和磁场力（吸力或斥力）的关系分别如下，

$$P_{heat} = UI \propto I = \frac{US}{2\pi Nr\rho} \propto \frac{S}{N}$$

$$F_{magn} \propto NI = \frac{US}{2\pi r\rho} \propto S$$

我们只能通过增大线圈横截面积来增大电磁铁的磁场力（ F_{magn} ）。同时，为了降低线圈的发热功率损耗（ P_{heat} ），我们需要成正比地增加线圈匝数。然而，更多的线圈匝数与铜线横截面积，会以平方的关系增加线圈质量，这对某些产品的应用范围提出了巨大的挑战。

结论：（a）两个相同的线圈串联→节能（ P_{heat} 减半），但不改变磁场强度；（b）使用更粗的铜线，可以成比例的增大磁场力，同时也会增大热功损耗；（c）强磁场力与弱热功损耗需要通过极重的铜线圈才能实现，或超导体（此处不展开讨论）。

以上结论对于设计磁悬浮时电磁铁线圈的选择，很有参考意义。